第二部分　几何模型

专题一　线与角模型

模型 1　双中点模型

1. B 【解析】∵ $AD=12$, $AC=BD=8$, ∴ $CD=AD-AC=12-8=4$, $AB=AD-BD=12-8=4$. ∵ E, F 分别是 AB, CD 的中点, ∴ $AE=\frac{1}{2}AB=2$, $FD=\frac{1}{2}CD=2$, ∴ $EF=AD-AE-FD=12-2-2=8$, 故选 B.

2. B 【解析】设 $AB=6k(k>0)$. ∵ $AB:BC:CD=3:4:5$, ∴ $BC=8k$, $CD=10k$, 则 $AD=AB+BC+CD=24k$. ∵ 点 M, N 分别是 AB, CD 的中点, ∴ $MA=MB=\frac{1}{2}AB=3k$, $CN=DN=\frac{1}{2}CD=5k$, ∴ $MN=MB+BC+CN=3k+8k+5k=16k=16$, 解得 $k=1$, ∴ $AD=24k=24$. 故选 B.

关键点拨

已知各线段的比, 常设参数表示各线段长, 根据数量关系列方程求解.

3. A 【解析】∵ $AB=12$ cm, $BC=20$ cm, $CD=16$ cm, ∴ $BD=BC+CD=20+16=36$(cm). ∵ 点 M 是 AB 的中点, 点 N 是 BD 的中点, ∴ $MB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times12=6$(cm), $BN=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times36=18$(cm), ∴ $MN=MB+BN=6+18=24$(cm). 故选 A.

4. 【解】(1)∵ 点 E 是 AC 的中点, $AC=6$,

∴ $EC=\frac{1}{2}AC=3$.

∵ $AB=18$, $CD=2$,

∴ $BD=AB-AC-CD=18-6-2=10$.

∵ 点 F 是 BD 的中点, ∴ $DF=\frac{1}{2}BD=5$,

∴ $EF=EC+CD+DF=3+2+5=10$.

(2)∵ $EF=12$, $CD=4$,

∴ $EC+DF=EF-CD=12-4=8$.

∵ 点 E, F 分别是 AC, BD 的中点,

∴ $AC=2EC$, $BD=2DF$,

∴ $AC+BD=2EC+2DF=2(EC+DF)=2\times8=16$,

∴ $AB=AC+CD+BD=16+4=20$, 故答案为 20.

(3)∵ $AB=a$, $CD=b$, ∴ $AC+BD=AB-CD=a-b$.

∵ 点 E, F 分别是 AC, BD 的中点,

∴ $EC=\frac{1}{2}AC$, $DF=\frac{1}{2}BD$,

∴ $EC+DF=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}(AC+BD)=\frac{a-b}{2}$,

∴ $EF=EC+CD+DF=\frac{a-b}{2}+b=\frac{a+b}{2}$, 故答案为 $\frac{a+b}{2}$.

(4)∵ $\angle AOB=150°$, $\angle COD=20°$,

∴ $\angle AOC+\angle BOD=\angle AOB-\angle COD=150°-20°=130°$.

∵ OE, OF 分别平分 $\angle AOC$, $\angle BOD$,

∴ $\angle EOC=\frac{1}{2}\angle AOC$, $\angle DOF=\frac{1}{2}\angle BOD$,

∴ $\angle EOC+\angle DOF=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD)=\frac{1}{2}\times130°=65°$,

∴ $\angle EOF=\angle EOC+\angle DOF+\angle COD=65°+20°=85°$, 故答案为 85.

(5)∵ $\angle AOB=\alpha$, $\angle COD=\beta$,

∴ $\angle AOC+\angle BOD=\angle AOB-\angle COD=\alpha-\beta$.

∵ OE, OF 分别平分 $\angle AOC$, $\angle BOD$,

∴ $\angle EOC=\frac{1}{2}\angle AOC$, $\angle DOF=\frac{1}{2}\angle BOD$,

∴ $\angle EOC+\angle DOF=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD)=\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$\therefore \angle EOF=\angle EOC+\angle DOF+\angle COD=\frac{\alpha-\beta}{2}+\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}$，故答案为$\frac{\alpha+\beta}{2}$.

5. 2.5　【解析】根据题意得 $CD=AD+AB+BC=3+4+1=8(\text{cm})$. 因为 E 是 AD 的中点，F 是 CD 的中点，所以 $DF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times8=4(\text{cm})$，$DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times3=1.5(\text{cm})$，所以 $EF=DF-DE=4-1.5=2.5(\text{cm})$. 故答案为 2.5.

6. **B**　【解析】设 $AE=a$，$BF=b$，$CD=x$. $\because E$，F 分别是线段 AD，BC 的中点，$\therefore ED=AE=a$，$AD=2a$，$CF=BF=b$，$CB=2b$，$\therefore DF=CF-CD=b-x$，$EC=ED-CD=a-x$. ①$\because AB=AD+CB-CD=2a+2b-x$，$\therefore \frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(2a+2b-x)=a+b-\frac{1}{2}x$. $\because EF=ED+DF=a+b-x$，$\therefore EF\neq\frac{1}{2}AB$，故结论①不正确. ②$AC=AE+EC=a+a-x=2a-x$，$BD=BF+DF=b+b-x=2b-x$. $\because AE=BF$，$\therefore a=b$，$\therefore AC=BD$，故结论②正确. ③$\because AB=2a+2b-x$，$CD=x$，$\therefore AB-CD=2a+2b-2x$. $\because EF=a+b-x$，$\therefore 2EF=2a+2b-2x$，$\therefore AB-CD=2EF$，故结论③正确. ④$\because AC=2a-x$，$BD=2b-x$，$\therefore AC-BD=2a-2b$. $\because EC=a-x$，$DF=b-x$，$\therefore EC-DF=a-b$，$\therefore AC-BD\neq EC-DF$，故结论④不正确. 综上所述，正确的结论是②③. 故选 B.

7. **B**　【解析】$\because$ 线段 AP 和 AB 的中点分别为 P_1，B_1，$\therefore AP_1=\frac{1}{2}AP$，$AB_1=\frac{1}{2}AB$，$\therefore B_1P_1=\frac{1}{2}(AP-AB)=\frac{1}{2}BP$. 又$\because BP=64$，$\therefore B_1P_1=32$. 同理，$B_2P_2=\frac{1}{2}B_1P_1=16$，$B_3P_3=\frac{1}{2}B_2P_2=8$，$B_4P_4=\frac{1}{2}B_3P_3=4$，$B_5P_5=\frac{1}{2}B_4P_4=2$，$B_6P_6=\frac{1}{2}B_5P_5=1$，$\therefore B_1P_1+B_2P_2+B_3P_3+B_4P_4+B_5P_5+B_6P_6=32+16+8+4+2+1=63$. 故选 B.

8.【解】(1)$\because$ 点 N 是 BC 的中点，

$\therefore CN=BN=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AB-AC)=9$.

(2)$\because$ 点 M 是 AB 的中点，

$\therefore BM=\frac{1}{2}AB=15$.

$\because MN=BM-BN$，$\therefore MN=6$.

9.【解】(1)$\because$ 点 E 是 BC 的中点，$BE=2$，

$\therefore BC=2BE=4$.

$\because AB=10$，

$\therefore AC=AB+BC=14$.

又$\because$ 点 D 是 AC 的中点，

$\therefore AD=CD=\frac{1}{2}AC=7$，

$\therefore BD=AB-AD=10-7=3$.

(2)$\because$ 点 D，E 分别是线段 AC 和线段 BC 的中点，$\therefore AD=CD=\frac{1}{2}AC$，$BE=EC=\frac{1}{2}BC$.

$\because DC-EC=DE$，即$\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}BC=a$，

$\therefore \frac{1}{2}(AC-BC)=a$，即$\frac{1}{2}AB=a$，

$\therefore AB=2a$，

$\therefore$ 线段 AB 的长为 $2a$ cm.

10.【解】(1)$\because$ 点 M，N 分别是 AC，CB 的中点，

$\therefore CM=\frac{1}{2}AC$，$NC=\frac{1}{2}BC$.

$\because AC=12$ cm，$CB=9$ cm，

$\therefore CM=6$ cm，$NC=\frac{9}{2}$ cm，

$\therefore MN=6+\frac{9}{2}=10.5(\text{cm})$.

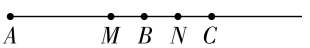
(2)$\because$ 点 M，N 分别是 AC，CB 的中点，

$\therefore CM=\frac{1}{2}AC$，$NC=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore MN=\frac{1}{2}(AC+CB)$.

$\because AC+CB=a$ cm，$\therefore MN=\frac{a}{2}$ cm.

(3)能. 画出图形如下：



结论：$MN=\frac{b}{2}$ cm. 理由如下：

∵ 点 M,N 分别是 AC,CB 的中点，

∴ $CM=\frac{1}{2}AC,NC=\frac{1}{2}BC$.

∵ $MN=CM-CN$，

∴ $MN=\frac{1}{2}(AC-CB)$.

∵ $AC-CB=b$ cm，∴ $MN=\frac{b}{2}$ cm.

解题有法

双中点模型：线段没有公共部分则线段相加，有公共部分则线段相减.

模型 2　平行线模型

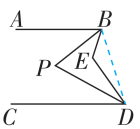
1. 60　【解析】∵ $BD//PQ$，∴ $\angle POB=\angle OBD=90°$. ∵ $\angle AOB=150°$，∴ $\angle AOP=\angle AOB-\angle POB=150°-90°=60°$. ∵ $AC//PQ$，∴ $\angle OAC=\angle AOP=60°$. 故答案为 60.

关键点拨

平行线间拐角凹进去用 M 模型.

2. 50°　【解析】∵ $\angle ABE=150°$，∴ $\angle ABP=30°$. ∵ $\angle CDF=160°$，∴ $\angle CDP=20°$. ∵ $AB//MN//CD$，∴ $\angle BPN=\angle ABP=30°$，$\angle NPD=\angle CDP=20°$，∴ $\angle EPF=\angle EPN+\angle NPF=50°$.

3.【解】(1) 如图(1)，连接 BD.



图(1)

∵ $AB//CD$，

∴ $\angle ABD+\angle CDB=180°$，

∴ $\angle ABE+\angle EBD+\angle EDB+\angle CDE=180°$.

∵ $\angle BED+\angle EBD+\angle EDB=180°$，

∴ $\angle BED=\angle ABE+\angle CDE$，

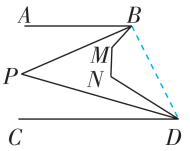
同法可证，$\angle BPD=\angle ABP+\angle CDP$.

∵ BP,DP 分别平分 $\angle ABE,\angle EDC$，

∴ $\angle ABP=\angle PBE=\frac{1}{2}\angle ABE$，$\angle CDP=\angle PDE=\frac{1}{2}\angle CDE$，∴ $\angle BPD=\frac{1}{2}(\angle ABE+\angle CDE)$，

∴ $\angle BPD=\frac{1}{2}\angle BED$.

(2) 如图(2)，连接 BD.



图(2)

∵ $\angle BMN=140°$，$\angle MND=120°$，

∴ $\angle MBD+\angle NDB=360°-(140°+120°)=100°$.

∵ BP,DP 分别平分 $\angle ABM,\angle NDC$，

∴ $\angle PBM=\frac{1}{2}\angle ABM,\angle PDN=\frac{1}{2}\angle CDN$.

∵ $AB//CD$，

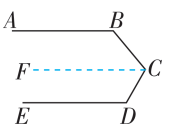
∴ $\angle ABM+\angle MBD+\angle NDB+\angle CDN=180°$，

∴ $\angle ABM+\angle CDN=180°-100°=80°$，

∴ $\angle PBM+\angle PDN=\frac{1}{2}(\angle ABM+\angle CDN)=\frac{1}{2}\times 80°=40°$，

∴ $\angle BPD=180°-(\angle MBD+\angle NDB)-(\angle PBM+\angle PDN)=40°$. 故答案为 40.

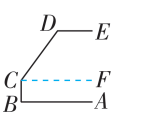
4. B　【解析】如图所示，过点 C 作 $CF//AB$. ∵ $AB//DE$，∴ $AB//DE//CF$，∴ $\angle BCF=180°-\angle B=50°$，$\angle DCF=180°-\angle D=60°$，∴ $\angle BCD=\angle BCF+\angle DCF=110°$. 故选 B.



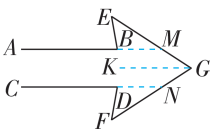
关键点拨

平行线间拐角凸出来用铅笔模型.

5. C　【解析】如图，过点 C 作 $CF//DE$，∴ $\angle DCF=180°-\angle EDC=54°$. ∵ $BC\perp AB$，∴ $\angle B=90°$. ∵ $ED//AB$，∴ $CF//AB$，∴ $\angle BCF=180°-\angle B=90°$，∴ $\angle DCB=\angle DCF+\angle BCF=144°$，故选 C.



(第 5 题图)



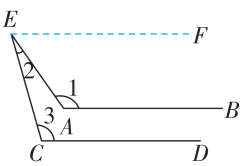
(第 6 题图)

6. C　【解析】延长 AB 交 EG 于 M，延长 CD 交 FG 于 N，过 G 作 $GK//AB$，如图所示. ∵ $AB//CD$，∴ $AB//GK//CD$，∴ $\angle KGM=\angle EMB$，$\angle KGN=\angle DNF$，∴ $\angle KGM+\angle KGN=\angle EMB+\angle DNF$，∴ $\angle EGF=\angle EMB+\angle DNF$. ∵ $\angle ABE=80°$，$\angle E=47°$，∴ $\angle EMB=\angle ABE-\angle E=33°$，同理，$\angle DNF=33°$，∴ $\angle EGF=\angle EMB+\angle DNF=$

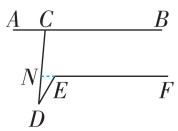
33°+33°=66°. 故选 C.

7. 270　【解析】∵ $BC//DE$, ∴ $\angle CBH+\angle BGE=180°$. ∵ $\angle AHE$ 是△EGH 的一个外角, ∴ $\angle AHE=\angle BGE+\angle HEG=90°$. ∵ $\angle DEH+\angle HEG=180°$, ∴ $\angle CBH+\angle DEH=180°-\angle BGE+180°-\angle HEG=180°+180°-(\angle BGE+\angle HEG)=270°$. 故答案为 270.

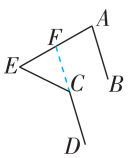
8. A　【解析】过点 E 作 $EF//AB$, 如图所示. ∵ $AB//CD$, ∴ $EF//AB//CD$, ∴ $\angle FEA+\angle 1=180°$, $\angle FEC+\angle 3=180°$, ∴ $\angle FEA=180°-\angle 1$, ∴ $180°-\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$, ∴ $\angle 1=\angle 2+\angle 3$. 故选 A.



9. C　【解析】延长 FE 交 DC 于点 N, 如图所示. ∵ 直线 $AB//EF$, ∴ $\angle BCD=\angle DNF=95°$. ∵ $\angle CDE=25°$, ∴ $\angle DEF=95°+25°=120°$. 故选 C.



10. D　【解析】如图, 延长 DC 交 AE 于点 F. ∵ $AB//CD$, $\angle BAE=77°$, ∴ $\angle CFE=\angle BAE=77°$. ∵ $\angle DCE=133°$, ∴ $\angle E=\angle DCE-\angle CFE=133°-77°=56°$, 故选 D.



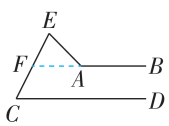
11. 【证明】如图, 延长 BA 交 CE 于点 F.

∵ $\angle EAB$ 是△AEF 的外角,

∴ $\angle EAB=\angle AFE+\angle E$.

又∵ $\angle C+\angle E=\angle EAB$,

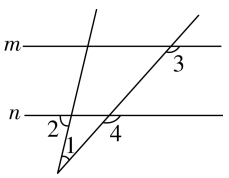
∴ $\angle C=\angle AFE$, ∴ $AB//CD$.



12. B　【解析】∵ $AB//CD$, $\angle ABE=45°$, ∴ $\angle BCD=\angle ABE=45°$. ∵ $\angle D=20°$, ∴ $\angle E=\angle BCD-\angle D=25°$, 故选 B.

13. D　【解析】∵ $AB//CD$, ∴ $\angle ACD=\angle A=40°$. ∵ $\angle ACD=\angle D+\angle E$, $\angle D=24°$, ∴ $\angle E=16°$, 故选 D.

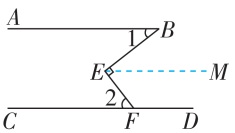
14. C　【解析】如图. ∵ $m//n$, ∴ $\angle 3=\angle 4$. ∵ $180°-\angle 2+\angle 1+180°-\angle 4=180°$, ∴ $\angle 2+\angle 4-\angle 1=180°$, 即 $\angle 2+\angle 3-\angle 1=180°$, 故选 C.



15. (1)【证明】如图(1),

过点 E 作 $EM//AB$,

则 $\angle BEM=\angle 1$.



图(1)

又∵ $AB//CD$, ∴ $EM//CD$,

∴ $\angle MEF=\angle 2$,

∴ $\angle 1+\angle 2=\angle BEM+\angle MEF=\angle BEF$.

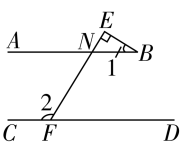
∵ $EF\perp BE$,

∴ $\angle BEF=90°$,

∴ $\angle 1+\angle 2=90°$.

【解】(2)(1)中的结论不成立, 正确结论: $\angle 2-\angle 1=90°$.

证明: 如图(2), 设 EF 与 AB 交于 N.



图(2)

∵ $AB//CD$,

∴ $\angle ANE=\angle 2$,

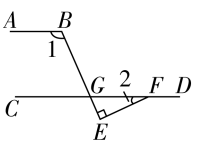
∴ $\angle 2-\angle 1=\angle ANE-\angle 1=\angle BEF$.

∵ $EF\perp BE$, ∴ $\angle BEF=90°$,

∴ $\angle 2-\angle 1=90°$.

(3)(1)中的结论不成立, 正确结论: $\angle 1-\angle 2=90°$.

如图(3), 设 BE 与 CD 交于 G.



图(3)

∵ $AB//CD$,

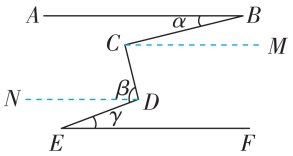
∴ $\angle BGF=\angle 1$,

∴ $\angle 1-\angle 2=\angle BGF-\angle 2=\angle BEF$.

∵ $EF\perp BE$, ∴ $\angle BEF=90°$,

∴ $\angle 1-\angle 2=90°$.

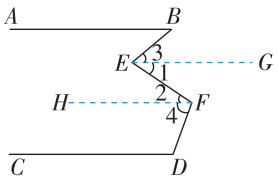
16. B 【解析】过点 C 作 $CM\parallel AB$，过点 D 作 $DN\parallel AB$，如图.



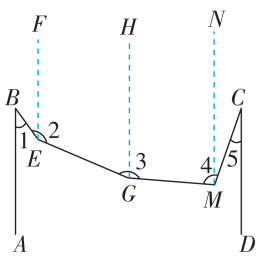
$\because AB\parallel EF$，$\therefore AB\parallel CM\parallel DN\parallel EF$，$\therefore \angle BCM=\angle\alpha$，$\angle DCM=\angle CDN$，$\angle EDN=\angle\gamma$. $\because \angle\beta=\angle CDN+\angle EDN=\angle CDN+\angle\gamma$，①$\angle BCD=\angle BCM+\angle DCM=\angle\alpha+\angle CDN=90°$，② 由①②得 $\angle\alpha+\angle\beta-\angle\gamma=90°$. 故选 B.

17. $\angle F-\angle E=30°$

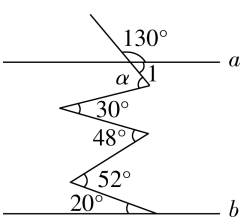
【解析】过点 E 作 $EG\parallel AB$，过点 F 作 $FH\parallel AB$，如图. $\because AB\parallel CD$，$\therefore AB\parallel EG\parallel FH\parallel CD$，$\therefore \angle B=\angle 3=40°$，$\angle 4=180°-\angle D=70°$，$\angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle BEF=\angle 1+\angle 3=\angle 1+40°$，$\angle EFD=\angle 2+\angle 4=\angle 2+70°$，$\therefore \angle EFD-\angle BEF=30°$. 故答案为 $\angle F-\angle E=30°$.



18. 360 【解析】过 E 作 $EF\parallel CD$，过 G 作 $GH\parallel CD$，过 M 作 $MN\parallel CD$，如图所示. $\because CD\parallel AB$，$\therefore EF\parallel GH\parallel MN\parallel AB\parallel CD$，$\therefore \angle 1=\angle BEF$，$\angle GEF+\angle EGH=180°$，$\angle HGM+\angle GMN=180°$，$\angle NMC=\angle 5$. $\because \angle 2=\angle BEF+\angle GEF$，$\angle 3=\angle EGH+\angle HGM$，$\angle 4=\angle GMN+\angle NMC$，$\therefore \angle 2+\angle 3+\angle 4-\angle 1-\angle 5=\angle BEF+\angle GEF+\angle EGH+\angle HGM+\angle GMN+\angle NMC-\angle BEF-\angle NMC=\angle GEF+\angle EGH+\angle HGM+\angle GMN=360°$. 故答案为 360.



19. 【解】令与 130°角互补的角为 $\angle 1$，如图所示.



$\because \angle 1+130°=180°$，$\therefore \angle 1=50°$.

$\because a\parallel b$，$\therefore \angle\alpha+48°+20°=\angle 1+30°+52°$，$\therefore \angle\alpha=64°$.

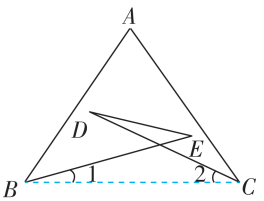
解题有法

平行线间有多个拐角时，朝向左边的角的度数之和=朝向右边的角的度数之和.

模型 3　飞镖模型

1. 75 【解析】连接 BC. $\because \angle A=65°$，$\therefore \angle ABC+\angle ACB=180°-65°=115°$. $\because \angle BDC=140°$，$\therefore \angle DBC+\angle DCB=180°-140°=40°$，$\therefore \angle 1+\angle 2=(\angle ABC+\angle ACB)-(\angle DBC+\angle DCB)=115°-40°=75°$. 故答案为 75.

2. B 【解析】如图，连接 BC. $\because \angle A=70°$，$\angle ABE=40°$，$\angle ACD=30°$，$\therefore \angle 1+\angle 2=180°-\angle A-\angle ABE-\angle ACD=180°-70°-40°-30°=40°$. $\because \angle D+\angle E=\angle 1+\angle 2$，$\therefore \angle D+\angle E=40°$.



关键点拨

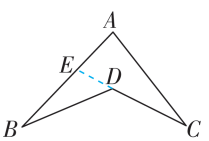
由对顶角相等得到 $\angle D+\angle E=\angle 1+\angle 2$ 是解题关键.

3. 【解】(1)材料中的根据 1 是指三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

故答案为三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

(2)能想出其他解法.

解答过程如下：延长 CD 交 AB 于 E，如图.



$\because \angle BED=\angle A+\angle C$，$\angle BDC=\angle B+\angle BED$，

$\therefore \angle BDC=\angle A+\angle B+\angle C$.（解法不唯一）

(3) $\because \angle BDC=\angle A+\angle B+\angle C=145°$，$\angle B=18°$，$\angle C=20°$，

$\therefore \angle A=107°\neq 110°$，

$\therefore$ 这个零件不合格. 故答案为不合格.

4. 【解】(1) $\because \angle 1=20°$，$\angle 2=30°$，$\angle BEC=100°$，$\therefore \angle BDC=\angle BEC+\angle 1+\angle 2=100°+20°+30°=150°$. 故答案为 150°.

(2) $\angle BDC+\angle BAC=2\angle BEC$,

理由如下:

由题意得,$\angle BDC=\angle BEC+\angle 1+\angle 2$,①

$\angle BEC=\angle BAC+\angle ABE+\angle ACE$. ②

$\because$ BE 平分 $\angle ABD$,CE 平分 $\angle ACD$,

$\therefore$ $\angle ABE=\angle 1$,$\angle ACE=\angle 2$,

$\therefore$ ①−②,得 $\angle BDC-\angle BEC=\angle BEC-\angle BAC$,

$\therefore$ $\angle BDC+\angle BAC=2\angle BEC$.

(3)$\because$ $\angle 1=\frac{1}{3}\angle ABD$,$\angle 2=\frac{1}{3}\angle ACD$,

$\therefore$ $\angle ABE=\frac{2}{3}\angle ABD$,$\angle ACE=\frac{2}{3}\angle ACD$.

$\because$ $\angle BEC=\angle BAC+\angle ABE+\angle ACE=\angle BAC+\frac{2}{3}\angle ABD+\frac{2}{3}\angle ACD$,①

$\angle BDC=\angle BAC+\angle ABD+\angle ACD$,②

②+①,得 $\angle BDC+\angle BEC=2\angle BAC+\frac{5}{3}\angle ABD+\frac{5}{3}\angle ACD$,

$\therefore$ $3\angle BDC+3\angle BEC=6\angle BAC+5\angle ABD+5\angle ACD$,

$\therefore$ $3\angle BDC+3\angle BEC=\angle BAC+5(\angle BAC+\angle ABD+\angle ACD)$,

$\therefore$ $3\angle BDC+3\angle BEC=\angle BAC+5\angle BDC$,

$\therefore$ $2\angle BDC+\angle BAC=3\angle BEC$.

故答案为 $2\angle BDC+\angle BAC=3\angle BEC$.

5.【解】(1)由题意得 $\angle ABC+\angle ACB=125°$,

$\angle PBC+\angle PCB=90°$,

$\therefore$ $\angle ABP+\angle ACP=35°$.

故答案为 125,90,35.

(2)猜想:$\angle ABP+\angle ACP=90°-\angle A$.

理由:在△ABC 中,$\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A$.

$\because$ $\angle ABC=\angle ABP+\angle PBC$,$\angle ACB=\angle ACP+\angle PCB$,

$\therefore$ $(\angle ABP+\angle PBC)+(\angle ACP+\angle PCB)=180°-\angle A$,

$\therefore$ $(\angle ABP+\angle ACP)+(\angle PBC+\angle PCB)=180°-\angle A$.

又$\because$ 在 Rt△PBC 中,$\angle P=90°$,

$\therefore$ $\angle PBC+\angle PCB=90°$,

$\therefore$ $(\angle ABP+\angle ACP)+90°=180°-\angle A$,

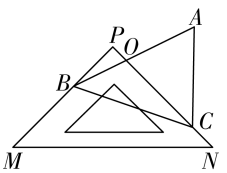
$\therefore$ $\angle ABP+\angle ACP=90°-\angle A$.

(3)(2)中的结论不成立. $\angle A+\angle ACP-\angle ABP=90°$或$\angle A+\angle ABP-\angle ACP=90°$或$\angle A-\angle ABP-\angle ACP=90°$.

①如图(1),设 AB 交 PN 于 O. $\because$ $\angle AOC=\angle BOP$,

$\therefore$ $\angle A+\angle ACP=90°+\angle ABP$,

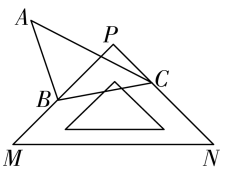
$\therefore$ $\angle A+\angle ACP-\angle ABP=90°$.



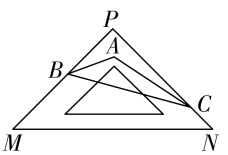
图(1)

②如图(2),$\angle A+\angle ABP-\angle ACP=90°$.

证明方法同①.



图(2)



图(3)

③如图(3),

$\because$ $\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$,$\angle P+\angle ABP+\angle ACP+\angle ABC+\angle ACB=180°$,

$\therefore$ $\angle A=\angle P+\angle ABP+\angle ACP$,

$\therefore$ $\angle A-\angle ABP-\angle ACP=90°$.

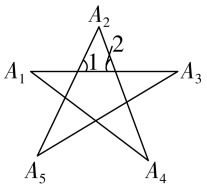
6.【解】(1)①如图(1). $\because$ $\angle 1=\angle A_5+\angle A_3$,$\angle 2=\angle A_1+\angle A_4$,$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle A_2=\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5=180°$. 故答案为 180°.

②如图(2),连接 A_1A_4,A_3A_6. $\because$ $\angle 1=\angle A_2A_6A_3+\angle A_1A_3A_6$,$\angle 2=\angle A_3A_1A_4+\angle A_2A_4A_1$,$\angle 3=\angle A_4A_1A_5+\angle A_1A_4A_6$,$\angle 4=\angle A_4A_6A_3+\angle A_6A_3A_5$,$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle A_2+\angle 3+\angle 4+\angle A_5=\angle A_3A_1A_5+\angle A_2+\angle A_1A_3A_5+\angle A_2A_4A_6+\angle A_5+\angle A_2A_6A_4=360°$.

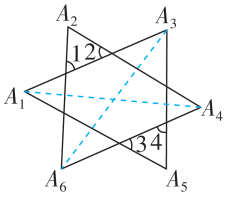
③同理①②可得,$\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5+\angle A_6+\angle A_7=540°$. 故答案为 540°.

(2)① $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\cdots+\angle A_n=(n-4)\times 180°$. 故答案为 $(n-4)\times 180°$.

②当 $n=2\ 024$ 时,$\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\cdots+\angle A_{2\ 024}=(2\ 024-4)\times 180°=363\ 600°$. 故答案为 363 600°.



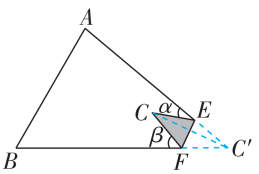
图(1)



图(2)

模型 4　折角模型

1. C 【解析】延长 AE, BF 交于点 C', 连接 CC', 如图. ∵ $\angle\alpha = \angle ECC' + \angle EC'C$, $\angle\beta = \angle FCC' + \angle FC'C$, ∴ $\angle\alpha+\angle\beta = \angle ECC'+\angle EC'C+\angle FCC'+\angle FC'C = \angle ECF+\angle EC'F = 2\angle ECF$. ∵ $\angle ECF = 180°-\angle A-\angle B = 180°-80°-60° = 40°$, ∴ $\angle\alpha+\angle\beta = 80°$. ∵ $\angle\alpha = 30°$, ∴ $\angle\beta = 50°$, 故选 C.



关键点拨　折角在内部

腹下两角之和等于折角的 2 倍.

2. 50 【解析】∵ 将纸片 $\triangle ABC$ 沿 DE 折叠, 点 A 落在点 F 处, ∴ $\angle ADE = \angle EDF$, $\angle AED = \angle DEF$, ∴ $\angle 1+2\angle ADE+\angle 2+2\angle AED = 180°+180°$, ∴ $\angle 1+\angle 2+2(\angle ADE+\angle AED) = 360°$. 又∵ $\angle 1+\angle 2 = 100°$, ∴ $\angle ADE+\angle AED = 130°$, ∴ $\angle A = 180°-(\angle ADE+\angle AED) = 50°$. 故答案为 50.

3. 【解】由题意知, $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6 = 720°-(\angle B'FG+\angle B'GF)-(\angle C'HI+\angle C'IH)-(\angle A'DE+\angle A'ED) = 720°-(180°-\angle B')-(180°-\angle C')-(180°-\angle A') = 180°+(\angle B'+\angle C'+\angle A')$.

又∵ $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle A+\angle B+\angle C = 180°$,

∴ $\angle A'+\angle B'+\angle C' = 180°$,

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6 = 360°$.

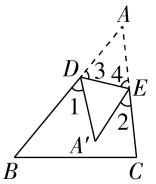
4. 【解】(1) $2\angle A = \angle 1+\angle 2$. 理由:

如图(1), 根据折叠的性质, 得 $\angle 3 = \frac{1}{2}(180°-\angle 1)$, $\angle 4 = \frac{1}{2}(180°-\angle 2)$.

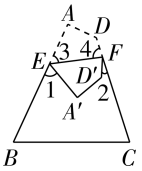
∵ $\angle A+\angle 3+\angle 4 = 180°$,

∴ $\angle A+\frac{1}{2}(180°-\angle 1)+\frac{1}{2}(180°-\angle 2) = 180°$,

整理, 得 $2\angle A = \angle 1+\angle 2$.



图(1)



图(2)

(2) $2(\angle A+\angle D) = \angle 1+\angle 2+360°$.

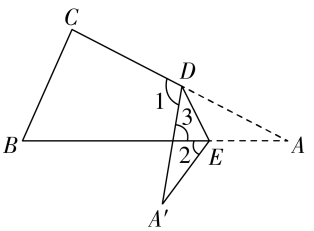
理由: 如图(2), 根据折叠的性质, 得 $\angle 3 = \frac{1}{2}(180°-\angle 1)$, $\angle 4 = \frac{1}{2}(180°-\angle 2)$.

∵ $\angle A+\angle D+\angle 3+\angle 4 = 360°$,

∴ $\angle A+\angle D+\frac{1}{2}(180°-\angle 1)+\frac{1}{2}(180°-\angle 2) = 360°$,

整理, 得 $2(\angle A+\angle D) = \angle 1+\angle 2+360°$.

5. A 【解析】如图. ∵ $\triangle A'DE$ 是 $\triangle ADE$ 沿 DE 折叠得到的, ∴ $\angle A' = \angle A$. 又∵ $\angle ADA' = 180°-\angle 1$, $\angle 3 = \angle A'+\angle 2$, $\angle A+\angle ADA'+\angle 3 = 180°$, ∴ $\angle A+180°-\angle 1+\angle A'+\angle 2 = 180°$, 整理, 得 $2\angle A = \angle 1-\angle 2$. 故选 A.



关键点拨　折角在外部

腹下两角之差等于折角的 2 倍.

6. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$, ∴ $\angle C = 180°-\angle A-\angle B = 50°$. 由折叠可知, $\angle CDE = \angle C'DE$, $\angle CED = \angle C'ED$, ∴ $\angle CED = \frac{180°+\angle 2}{2} = 99°$, ∴ $\angle CDE = 180°-\angle CED-\angle C = 31°$, ∴ $\angle 1 = 180°-\angle CDE-\angle C'DE = 180°-2\angle CDE = 118°$. 故选 B.

7. 20° 【解析】由折叠得 $\angle AEF = \angle A'EF$, $\angle AFE = \angle A'FE$. ∵ $\angle AEF+\angle A'EF+\angle 1 = 180°$, 且 $\angle 1 =$

$100°$，∴ $2\angle AEF+100°=180°$，∴ $\angle AEF=40°$.

∵ $\angle AFE+\angle A'FE+\angle AFA'=360°$，且 $\angle AFA'=180°-\angle 2=180°-60°=120°$，∴ $2\angle AFE+120°=360°$，∴ $\angle AFE=120°$，∴ $\angle A=180°-\angle AEF-\angle AFE=180°-40°-120°=20°$.

8. (1)【证明】∵ $AB=AC$，$\angle BAC=120°$，

∴ $\angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180°-120°)=30°$，

∴ $\angle E=\angle B=30°$.

∵ $DE/\!/AC$，∴ $\angle CAF=\angle E=30°$，

∴ $\angle CAF=\angle C$，∴ $\triangle AFC$ 是等腰三角形.

(2)【解】由折叠的性质得 $\angle BAD=\angle EAD$.

∵ $\angle BAE=\angle BAC-\angle CAE=120°-30°=90°$，

∴ $\angle BAD=\angle EAD=\frac{1}{2}\angle BAE=\frac{1}{2}\times90°=45°$，

∴ $\angle ADB=180°-\angle B-\angle BAD=180°-30°-45°=105°$.

9. 【解】(1)∵ $\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$，$\angle A+\angle B=50°$，∴ $\angle ACB=130°$.

∵ $\angle ACB-\angle A=100°$，∴ $\angle A=30°$.

∵ $\angle A+\angle B=50°$，∴ $\angle B=20°$.

故答案为 $30°$，$20°$，$130°$.

(2) $\angle EMC+\angle FNC=80°$.

理由：由折叠可得 $\angle A=\angle MEC=30°$，$\angle B=\angle NFC=20°$.

∵ $\angle MCD=\angle EMC+\angle MEC$，$\angle NCD=\angle FNC+\angle NFC$，

∴ $\angle MCD+\angle NCD=\angle EMC+\angle MEC+\angle FNC+\angle NFC$.

∵ $\angle MCD+\angle NCD=\angle ACB=130°$，$\angle MEC+\angle NFC=\angle A+\angle B=50°$，

∴ $\angle EMC+\angle FNC=130°-50°=80°$.

(3) $\angle FNC-\angle EMC=80°$.

由折叠可得 $\angle A=\angle MED=30°$，$\angle B=\angle NFC=20°$.

∵ $\angle MED=\angle EMC+\angle MCE$，$\angle NCD=\angle FNC+\angle NFC$，

∴ $\angle MCE=\angle MED-\angle EMC=30°-\angle EMC$，$\angle NCD=\angle FNC+20°$，

∴ $\angle MCE+\angle NCD=30°-\angle EMC+\angle FNC+20°=50°+\angle FNC-\angle EMC=130°$，

∴ $\angle FNC-\angle EMC=80°$.

专题二　三角形模型

模型 5　单角平分线模型

1. 【证明】∵ OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，P 是 OC 上的一点，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，∴ $PD=PE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OPD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle OPE$ 中，$\begin{cases}OP=OP,\\PD=PE,\end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle OPD\cong\mathrm{Rt}\triangle OPE(\mathrm{HL})$，∴ $OD=OE$.

∵ OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，∴ $\angle DOF=\angle EOF$.

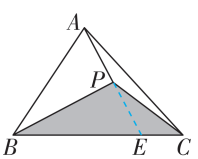
在 $\triangle ODF$ 和 $\triangle OEF$ 中，$\begin{cases}OD=OE,\\\angle DOF=\angle EOF,\\OF=OF,\end{cases}$

∴ $\triangle ODF\cong\triangle OEF(\mathrm{SAS})$，∴ $DF=EF$.

2. C　【解析】延长 AP 交 BC 于 E，如图. ∵ BP 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle ABP=\angle EBP$. ∵ $AP\perp BP$，

∴ $\angle APB=\angle EPB=90°$.



在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle EBP$ 中，

$\begin{cases}\angle ABP=\angle EBP,\\PB=PB,\\\angle APB=\angle EPB,\end{cases}$

∴ $\triangle ABP\cong\triangle EBP(\mathrm{ASA})$，

∴ $AP=PE$，$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle EBP}$，∴ $S_{\triangle ACP}=S_{\triangle ECP}$，

∴ $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times9=4.5(\mathrm{cm}^2)$，

故选 C.

思路分析

延长 AP 交 BC 于 E，由角平分线的定义证 $\triangle ABP\cong\triangle EBP$，得 $AP=PE$，根据等底同高得到三角形的面积关系，进而求解.

3. (1)【证明】∵ AD 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$, $\angle C=90°$,

∴ $DC=DE$.

在 $Rt\triangle DCF$ 和 $Rt\triangle DEB$ 中, $\begin{cases} DC=DE, \\ DF=DB, \end{cases}$

∴ $Rt\triangle DCF \cong Rt\triangle DEB$(HL),

∴ $CF=EB$.

(2)【解】$AF+BE=AE$. 理由如下:

∵ $DC=DE$, $AD=AD$,

∴ $Rt\triangle DCA \cong Rt\triangle DEA$(HL),

∴ $AC=AE$, ∴ $AF+FC=AE$, 即 $AF+BE=AE$.

4. 【解】(1) $\triangle BDE$ 的形状是等腰三角形.

理由如下: ∵ BD 平分 $\angle ABC$, ∴ $\angle ABD=\angle CBD$.

∵ $BC \parallel ED$, ∴ $\angle EDB=\angle CBD$, ∴ $\angle EDB=\angle ABD$, ∴ $EB=ED$, ∴ $\triangle BDE$ 是等腰三角形.

(2)①∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

∵ BE 平分 $\angle ABC$, ∴ 同(1)可得 $AB=AE$,

∴ $\triangle ABE$ 为等腰三角形.

∵ $AF \perp BE$, ∴ $\angle BAG=\angle DAF$.

∵ $AD \parallel BC$, ∴ $\angle DAF=\angle AGB=\angle CGF$.

∵ $AB \parallel CD$, ∴ $\angle BAG=\angle CFG$,

∴ $\angle BAG=\angle AGB=\angle DAF=\angle DFA=\angle CGF$,

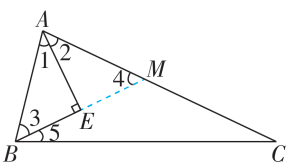
∴ $AB=BG$, $DA=DF$, $CG=CF$,

∴ $\triangle ABG$, $\triangle AFD$, $\triangle CGF$ 为等腰三角形, ∴ 共有 4 个等腰三角形. 故选 B.

②由①可知, $AB=BG=3$, $CG=CF$.

∵ $CG=BC-BG=5-3=2$, ∴ $CF=2$.

5. **B** 【解析】延长 BE 交 AC 于 M, 如图所示.



∵ $BE \perp AE$, ∴ $\angle AEB=\angle AEM=90°$, ∴ $\angle 3=90°-\angle 1$, $\angle 4=90°-\angle 2$. ∵ $\angle 1=\angle 2$, ∴ $\angle 3=\angle 4$, ∴ $AB=AM=5$. ∵ $BE \perp AE$, ∴ $BM=2BE=6$. ∵ $\angle 4$ 是 $\triangle BCM$ 的外角, ∴ $\angle 4=\angle 5+\angle C$. ∵ $\angle ABC=3\angle C$, ∴ $\angle ABC=\angle 3+\angle 5=\angle 4+\angle 5=2\angle 5+\angle C=3\angle C$, ∴ $\angle 5=\angle C$, ∴ $CM=BM=6$, ∴ $AC=AM+CM=5+6=11$. 故选 B.

6. (1)【证明】∵ $AD \parallel BC$, ∴ $\angle ADC=\angle DCB$.

∵ CD 平分 $\angle ACB$, ∴ $\angle ACD=\angle DCB$,

∴ $\angle ADC=\angle ACD$, ∴ $AD=AC$.

∵ $AB=AC$, ∴ $AD=AB$, ∴ $\triangle ABD$ 是等腰三角形.

(2)【解】设 $\angle ADC=x°$.

由(1)可得 $\angle ADC=\angle ACD=\angle DCB=x°$,

∴ $\angle ACB=\angle ACD+\angle DCB=2x°$.

∵ $AB=AC$, ∴ $\angle ABC=\angle ACB=2x°$.

∵ $\angle BDC=20°$,

∴ $\angle ADB=\angle ADC+\angle BDC=(x+20)°$.

∵ $AD=AB$,

∴ $\angle ADB=\angle ABD=(x+20)°$.

∵ $\angle BDC+\angle DBC+\angle DCB=180°$,

∴ $\angle BDC+\angle ABD+\angle ABC+\angle DCB=180°$,

∴ $20+x+20+2x+x=180$, 解得 $x=35$,

∴ $\angle ADC=35°$.

模型 6　双角平分线及高分模型

1. 116°　【解析】∵ $\angle A=52°$, ∴ $\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A=128°$. ∵ $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O, ∴ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$,

∴ $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}\times 128°=64°$, ∴ $\angle BOC=180°-(\angle 1+\angle 2)=180°-64°=116°$.

解题有法

三角形两内角平分线的夹角 = 90° + 第三个内角的一半.

2. **C**　【解析】∵ $EF \parallel BC$, ∴ $\angle EDB=\angle DBC$, $\angle FDC=\angle DCB$. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 D, ∴ $\angle EBD=\angle DBC$, $\angle FCD=\angle DCB$, ∴ $\angle EBD=\angle EDB$, $\angle FCD=\angle FDC$, ∴ $BE=ED$, $CF=DF$, 即 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 都是等腰三角形, 故①正确. ∵ $\angle ABC$ 不一定等于 $\angle ACB$, ∴ BE 与 CF 不一定相等, ∴ DF 与 DE 不一定相等, 故②错误. ∵ $\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$, ∴ $\angle DBC+\angle DCB=90°-\frac{1}{2}\angle A$, ∴ $\angle BDC=180°-(\angle DBC+\angle DCB)=90°+\frac{1}{2}\angle A$, 故③正确. ∵ $\triangle AEF$ 的周长为 $AE+EF+AF=AE+ED+DF+AF$, ∴ $\triangle AEF$ 的周长为 $AE+BE+AF+FC=AB+AC$, 故④正确. 故选 C.

3.【解】(1)∵ $\angle OAD+\angle ODA=60°$,

∴ $\angle BOC=\angle AOD=180°-(\angle OAD+\angle ODA)=180°-60°=120°$,

∴ $\angle OBC+\angle OCB=180°-\angle BOC=180°-120°=60°$.

∵ BD 平分 $\angle ABC$, CA 平分 $\angle DCB$,

∴ $\angle ABC=2\angle OBC$, $\angle DCB=2\angle OCB$,

∴ $\angle ABC+\angle DCB=2(\angle OBC+\angle OCB)=120°$,

∴ $\angle P=180°-(\angle ABC+\angle DCB)=180°-120°=60°$.

(2)∵ $\angle BOC=\angle BAC+\angle ABD=\angle CDB+\angle ACD$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle CDB=\beta$, $\angle BOC=\gamma$,

∴ $\alpha+\angle ABD=\gamma$, $\beta+\angle ACD=\gamma$.

∵ BD 平分 $\angle ABC$, CA 平分 $\angle DCB$,

∴ $\angle OBC=\angle ABD$, $\angle OCB=\angle ACD$,

∴ $\alpha+\angle OBC=\gamma$,① $\beta+\angle OCB=\gamma$,②

①+②得 $\alpha+\beta+\angle OBC+\angle OCB=2\gamma$.

∵ $\angle OBC+\angle OCB=180°-\angle BOC=180°-\gamma$,

∴ $\alpha+\beta+180°-\gamma=2\gamma$,

∴ $\alpha+\beta+180°=3\gamma$.

4.【解】$\angle P=90°-\frac{1}{2}\angle B$.

证明:∵ $\angle DAC=\angle B+\angle ACB$, $\angle ACE=\angle B+\angle BAC$,

AP, CP 分别是 $\angle DAC$ 和 $\angle ACE$ 的平分线,

∴ $\angle PAC=\frac{1}{2}\angle DAC=\frac{1}{2}(\angle B+\angle ACB)$, $\angle PCA=\frac{1}{2}\angle ACE=\frac{1}{2}(\angle B+\angle BAC)$.

在△ACP 中, $\angle P+\angle PAC+\angle PCA=180°$,

∴ $\angle P+\frac{1}{2}(\angle B+\angle ACB)+\frac{1}{2}(\angle B+\angle BAC)=180°$,

∴ $2\angle P+\angle B+\angle ACB+\angle B+\angle BAC=360°$.

在△ABC 中, $\angle ACB+\angle B+\angle BAC=180°$,

∴ $2\angle P+\angle B=180°$,

∴ $\angle P=90°-\frac{1}{2}\angle B$.

解题有法

三角形两外角平分线的夹角=90°−与之不相邻的内角的一半.

5.【解】(1)∵ BF, CF 分别是 $\angle DBC$ 和 $\angle BCE$ 的平分线,

∴ $\angle CBF=\frac{1}{2}\angle DBC$, $\angle BCF=\frac{1}{2}\angle BCE$.

∵ $\angle DBC=\angle A+\angle ACB$, $\angle BCE=\angle A+\angle ABC$, $\angle CBF+\angle BCF+\angle F=180°$, $\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$,

∴ $\angle F=180°-(\angle CBF+\angle BCF)=180°-\frac{1}{2}(\angle DBC+\angle BCE)=180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle ACB+\angle A+\angle ABC)=180°-\frac{1}{2}\angle A-90°=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

∵ $\angle A=50°$,

∴ $\angle F=65°$.

故答案为 65°.

(2)①$\alpha+\beta-\frac{1}{2}\angle A=90°$. 理由:

由(1)可知 $\angle BFC=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

∵ $\angle MFB=\alpha$, $\angle NFC=\beta$,

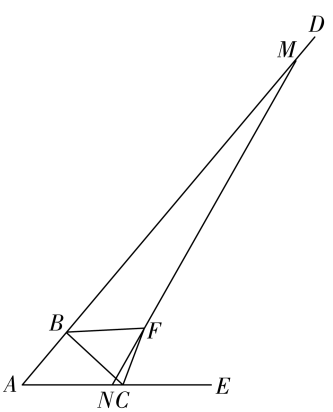
$\angle BFC+\angle MFB+\angle NFC=180°$,

∴ $\alpha+\beta+90°-\frac{1}{2}\angle A=180°$,

∴ $\alpha+\beta-\frac{1}{2}\angle A=90°$.

②不成立, $\alpha-\beta-\frac{1}{2}\angle A=90°$.

如图所示. 由(1)可知 $\angle BFC=90°-\frac{1}{2}\angle A$.



∵ $\angle MFB=\alpha$, $\angle NFC=\beta$,

$\angle BFN+\angle NFC=\angle BFC$,

∴ $\angle BFN=90°-\frac{1}{2}\angle A-\beta$.

∵ $\angle BFN+\angle MFB=180°$,

∴ $90°-\frac{1}{2}\angle A-\beta+\alpha=180°$,

∴ $\alpha-\beta-\frac{1}{2}\angle A=90°$.

6. D 【解析】∵ $\angle AMN$ 是 $\triangle OMN$ 的外角，∴ $\angle AMN=\angle O+\angle ONM$. ∵ $\angle EMN$ 是 $\triangle FMN$ 的外角，∴ $\angle EMN=\angle F+\angle FNM$. ∵ ME 平分 $\angle AMN$，NF 平分 $\angle MNO$，∴ $\angle AMN=2\angle EMN$，$\angle ONM=2\angle FNM$，∴ $\angle O=2\angle F$. ∵ $\angle O=60°$，∴ $\angle F=30°$. 故选 D.

解题有法

三角形一内一外角平分线所在直线的夹角＝第三个内角的一半.

7. (1)【解】由题意得 $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACN$ 的平分线交于点 D，

∴ $\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ACD=\angle DCN=\frac{1}{2}\angle ACN$.

∵ $\angle BAC=68°$，

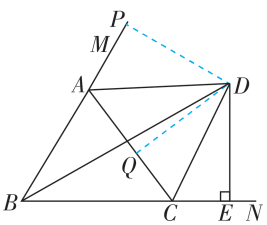
∴ $\angle ACN-\angle ABC=\angle BAC=68°$，

∴ $\angle DCN-\angle CBD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 68°=34°$.

∵ $\angle BDC=\angle DCN-\angle CBD$，

∴ $\angle BDC=34°$.

(2)【证明】如图，过点 D 作 $DP\perp BA$ 的延长线于 P，$DQ\perp AC$ 于 Q.



由题意知 $DE\perp BN$，BD 平分 $\angle ABC$，CD 平分 $\angle ACE$，

∴ $DP=DE$，$DQ=DE$，

∴ $DP=DQ$，

∴ AD 平分 $\angle CAM$.

(3)【解】如图. 由(2)知 $DP=DQ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADQ$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 中，$\begin{cases}DQ=DP,\\AD=AD,\end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ADQ\cong\mathrm{Rt}\triangle ADP(\mathrm{HL})$，

∴ $AP=AQ$，

同理得 $BP=BE$，$CQ=CE$.

∵ $\triangle ABC$ 的周长为 $AB+BC+AC=20$，

∴ $AB+BC+AP+CE=20$.

∵ $AB+AP=BC+CE$，

∴ $BC+CE=10$，即 $BE=10$.

8.【解】(1)∵ CP 平分 $\angle ACD$，BP 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle ACP=\frac{1}{2}\angle ACD$，$\angle CBP=\frac{1}{2}\angle ABC$.

∵ $\angle ACD=\angle A+\angle ABC$，

∴ $\angle ACP=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle ABC$.

∵ $\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，

∴ $\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A$.

∵ $\angle CBP+\angle P+\angle ACB+\angle ACP=180°$，

∴ $\frac{1}{2}\angle ABC+\angle P+\angle ACB+\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle ABC=180°$，

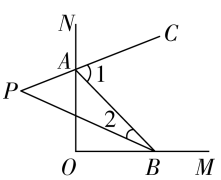
∴ $\angle ABC+\angle ACB+\angle P+\frac{1}{2}\angle A=180°$，

∴ $180°-\angle A+\angle P+\frac{1}{2}\angle A=180°$，

∴ $\angle P=\frac{1}{2}\angle A$.

(2) $\angle P$ 的大小不变.

如图(1)所示.



图(1)

∵ $\angle 2+\angle P=\angle 1$，$\angle ABO+\angle AOB=\angle NAB$，

∴ $\angle P=\angle 1-\angle 2$，$\angle AOB=\angle NAB-\angle ABO$.

又∵ BP 平分 $\angle ABO$，AC 平分 $\angle NAB$，

∴ $\angle NAB=2\angle 1$，$\angle ABO=2\angle 2$，

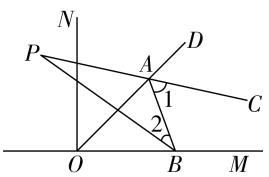
∴ $\angle AOB=\angle NAB-\angle ABO=2(\angle 1-\angle 2)=2\angle P$，

∴ $\angle P=\frac{1}{2}\angle AOB=45°$.

(3) $\angle P=22.5°$ 或 $67.5°$.

分两种情况：

①如图(2)所示.



图(2)

∵ $\angle 2+\angle P=\angle 1$，

$\angle ABO+\angle AOB=\angle DAB$，

$\therefore \angle P=\angle 1-\angle 2, \angle AOB=\angle DAB-\angle ABO.$

又∵ BP 平分 $\angle ABO$，AC 平分 $\angle DAB$，

$\therefore \angle DAB=2\angle 1, \angle ABO=2\angle 2,$

$\therefore \angle AOB=\angle DAB-\angle ABO=2(\angle 1-\angle 2)=2\angle P,$

$\therefore \angle P=\frac{1}{2}\angle AOB=22.5°.$

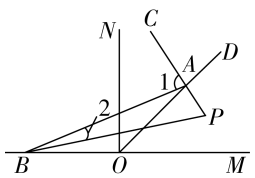
②如图(3)所示.

∵ $\angle 2+\angle P=\angle 1,$

$\angle ABO+\angle AOB=\angle DAB,$

$\therefore \angle P=\angle 1-\angle 2,$

$\angle AOB=\angle DAB-\angle ABO.$



图(3)

又∵ BP 平分 $\angle ABO$，AC 平分 $\angle DAB$，

$\therefore \angle DAB=2\angle 1, \angle ABO=2\angle 2,$

$\therefore \angle AOB=\angle DAB-\angle ABO=2(\angle 1-\angle 2)=2\angle P,$

$\therefore \angle P=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times(90°+45°)=67.5°.$

9.【解】(1)∵ $\angle C=70°, \angle B=40°, AD\perp BC$ 于 $D,$

$\therefore \angle BAC=180°-40°-70°=70°, \angle CAD=20°.$

∵ AE 平分 $\angle BAC,$

$\therefore \angle CAE=\frac{1}{2}\angle BAC=35°,$

$\therefore \angle DAE=\angle CAE-\angle CAD=35°-20°=15°.$

(2)∵ $\angle B+\angle C+\angle BAC=180°,$

$\therefore \angle BAC=180°-\angle B-\angle C.$

∵ AE 平分 $\angle BAC,$

$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-\angle B-\angle C)=$

$90°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C).$

∵ $AD\perp BC,$

$\therefore \angle ADE=90°, \therefore \angle B+\angle BAD=90°,$

$\therefore \angle BAD=90°-\angle B,$

$\therefore \angle DAE=\angle BAD-\angle BAE=(90°-\angle B)-\left[90°-\right.$

$\left.\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)\right]=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B).$

∵ $\angle C-\angle B=30°,$

$\therefore \angle DAE=\frac{1}{2}\times 30°=15°,$故答案为 15°.

(3)∵ $\angle C-\angle B=\alpha,$

$\therefore$ 同理(2)可得 $\angle DAE=\frac{1}{2}\alpha.$

解题有法

三角形中从同一顶点出发的角平分线和高线的夹角＝另外两顶角差的一半.

10. C　【解析】∵ AE 平分 $\angle BAC, \therefore \angle BAE=\angle CAE=30°, \therefore \angle EAD=\angle EAC-\angle DAC=30°-20°=10°.$ ∵ $AD\perp BC, \therefore \angle ADE=90°, \therefore \angle AED=90°-\angle EAD=80°.$ ∵ $\angle AED=\angle B+\angle BAE, \therefore \angle B=80°-30°=50°.$ 故选 C.

11. ①③④　【解析】①∵ AE 是 $\triangle ABC$ 的高，$\therefore \angle AED=90°, \therefore \angle DAE+\angle ADE=90°.$ ∵ $FH\perp AD, \therefore \angle F+\angle ADE=90°, \therefore \angle DAE=\angle F,$故结论①正确. ②∵ $\angle ACF=\angle DAC+\angle ADF, \angle DAC=\angle DAE+\angle CAE, \therefore \angle ACF=\angle DAE+\angle CAE+\angle ADF,$ 由结论①得 $\angle DAE=\angle F, \therefore \angle ACF=\angle F+\angle CAE+\angle ADF.$ 根据已知条件无法判定 $\angle F=\angle CAE,$故结论②不正确. ③∵ $FH\perp AD, \therefore \angle AGH+\angle DAE=90°.$ ∵ AE 是 $\triangle ABC$ 的高，$\therefore \angle AED=90°, \therefore \angle DAE+\angle ADE=90°, \therefore \angle AGH=\angle ADE.$ ∵ $\angle AGH+\angle AGF=180°, \angle ADE+\angle ADB=180°, \therefore \angle AGF=\angle ADB,$故结论③正确. ④∵ AE 是 $\triangle ABC$ 的高，$\therefore \angle AEC=90°, \therefore \angle ACB+\angle CAE=90°, \therefore \angle CAE=90°-\angle ACB.$ 由结论①得 $\angle DAE=\angle F, \therefore \angle DAC=\angle DAE+\angle CAE=\angle F+\angle CAE.$ ∵ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$\therefore \angle BAC=2\angle DAC=2\angle F+2\angle CAE,$ 即 $\angle BAC=2\angle F+2(90°-\angle ACB)=180°+2\angle F-2\angle ACB.$ 又∵ $\angle BAC=180°-\angle B-\angle ACB, \therefore 180°+2\angle F-2\angle ACB=180°-\angle B-\angle ACB,$ 整理得 $\angle ACB=2\angle F+\angle B,$故结论④正确. 综上所述，正确的结论有①③④. 故答案为①③④.

12.【解】(1)∵ $\angle C=40°, \angle B=70°,$

$\therefore \angle BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-70°-40°=70°.$

∵ AE 平分 $\angle CAB$,

∴ $\angle CAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times70°=35°$.

(2)∵ $AD\perp BC$,

∴ $\angle ADC=90°$,

∴ $\angle DAC=90°-\angle C=90°-40°=50°$.

由(1)得 $\angle CAE=35°$,

∴ $\angle DAE=\angle DAC-\angle CAE=50°-35°=15°$.

∵ $DF\perp AE$,

∴ $\angle AFD=90°$,

∴ $\angle ADF=90°-\angle DAE=90°-15°=75°$.

13.【解】(1)因为 $\angle B=30°$, $\angle C=70°$,

所以 $\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=80°$,

所以在 Rt△ABD 中, $\angle BAD=90°-\angle B=60°$.

因为 AE 平分 $\angle BAC$,

所以 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=40°$,

所以 $\angle EAD=\angle BAD-\angle BAE=20°$,

所以 $\alpha=20$.

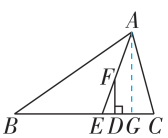
因为 $\angle BAC=180°-\angle B-\angle C$, $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC$, $\angle BAD=90°-\angle B$,

所以 $\angle DAE=\angle BAD-\angle BAE=90°-\angle B-\frac{1}{2}(180°-\angle B-\angle C)=90°-\angle B-90°+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

所以 $\angle EAD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

故答案为 20, $\angle EAD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

(2)如图(1),过点 A 作 $AG\perp BC$ 于 G.



图(1)

因为 $FD\perp BC$, $AG\perp BC$,

所以 $FD/\!/AG$,

所以 $\angle EFD=\angle EAG$.

因为 $\angle B=35°$, $\angle C=75°$,

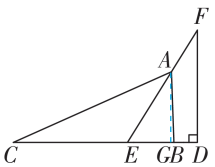
所以 $\angle BAG=90°-35°=55°$, $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-35°-75°)=35°$,

所以 $\angle DFE=\angle EAG=\angle BAG-\angle BAE=55°-35°=20°$.

由(1)同理可得, $\angle EAG=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$,

所以 $\angle DFE=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

(3)如图(2),过 A 作 $AG\perp BC$ 于 G,而 $FD\perp BC$,



图(2)

所以 $AG/\!/FD$,

所以 $\angle EAG=\angle EFD$.

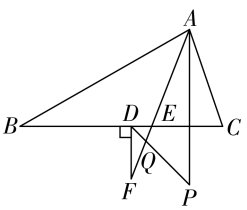
由(1)同理可得 $\angle EAG=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle C)$,

所以 $\angle EFD=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle C)$.

因为 $\angle ABC=88°$, $\angle C=24°$,

所以 $\angle EFD=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle C)=\frac{1}{2}\times(88°-24°)=32°$.

(4)如图(3),记 AF, DP 的交点为 Q.



图(3)

因为 $\angle AQP=\angle DQF$,

所以 $\angle QAP+\angle QPA=\angle QDF+\angle QFD$.

因为 $FD\perp BC$, DP 平分 $\angle EDF$,

所以 $\angle QDF=45°$.

因为 $\angle B=x$, $\angle C=y$, AF 平分 $\angle BAC$,所以 $\angle BAF=\angle CAF=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-x-y)$.

因为 AP 平分 $\angle CAF$,

所以 $\angle QAP=\frac{1}{2}\angle CAF=\frac{1}{4}(180°-x-y)$.

因为 $\angle DEF=\angle B+\angle BAF=x+\frac{1}{2}(180°-x-y)=90°+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$,

所以 $\angle F=90°-\angle DEF=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x$.

由 $\angle QAP+\angle QPA=\angle QDF+\angle QFD$ 可得,

$\angle P+\frac{1}{4}(180°-x-y)=45°+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x$,

整理,得 $\angle P=\frac{1}{4}(3y-x)$.